

Ecole CNRS, GDR Thermoélectricité, Thermodynamique et Thermoélectricité.

Séance n°2: "Machines Thermoélectriques".

Christophe Goupil CRISMAT ENSICAEN, LIED Paris VII.

Ventron, 1-6 juillet 2012

Conditions d'usage du fluide de travail: présentation.

- Les conditions d'usage du fluide de travail sont cruciales si l'on souhaite obtenir un fonctionnement optimal du système en plaçant le fluide de travail dans les conditions thermodynamiques les plus appropriées.
- Dans le cas d'un fluide classique comme l'eau, il existe des valeurs du couple des variables intensives (P, T) pour lesquelles le fonctionnement sera optimal, ou au contraire médiocre, en terme de production de travail maximale et production d'entropie minimale.
- Il est possible de définir quelques paramètres sensibles qui permettent de décrire les conséquences des conditions de fonctionnement sur les performances.
- En d'autre terme il importe que le contrôle des variables intensives macroscopiques (μ, T) imposées au système thermoélectrique conduisent à son fonctionnement optimum.
- En particulier, les courants électriques et de chaleurs doivent être soigneusement pilotés. (considérée en 2004 par J. Snyder et al.)

⇒ On définit deux grandeurs centrales que sont le courant relatif et le potentiel thermoélectrique.

Courant relatif et potentiel thermoélectrique.

- Courant relatif : rapport entre la densité de courant électrique \mathbf{J} et la fraction purement conductive du flux de chaleur.

$$u = -\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}}{\kappa_J \nabla T \cdot \mathbf{n}} \quad \text{ou} \quad 1/u = -\frac{\kappa_J \nabla T \cdot \mathbf{J}}{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}}$$

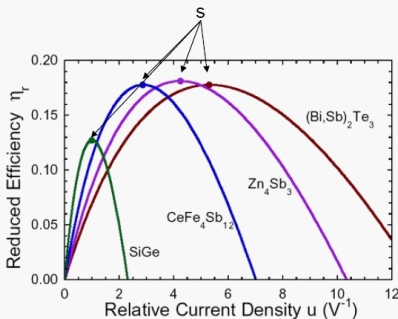
L'équation de transport de la chaleur s'exprime alors,

$$\mathbf{J}_Q = \alpha T \mathbf{J} + \frac{\mathbf{J}}{u} = \Phi \mathbf{J}, \quad \Phi = \left(\alpha T + \frac{1}{u} \right)$$

- où Φ est le potentiel thermoélectrique.

Notion de compatibilité : (Snyder, PRL 2003)

- La condition optimale est obtenue pour une valeur $u_{\text{opt}} = s$, appelé facteur de compatibilité.
- La valeur s est caractéristique d'un matériau donné.
- Il est donc possible que l'usage de matériaux P et N différents ne permettent pas d'envisager un dispositif performant par suite d'un grande différence des valeurs de s .
- Cette question revient à admettre qu'il existe des fluides de travail dont les plages d'usage, pour les couples (P, T) , se trouvent être incompatibles.



Conséquence pour l'entropie.

- $\mathbf{J}_S = \frac{1}{T} \left(\alpha T + \frac{1}{u} \right) \mathbf{J} = \frac{\Phi}{T} \mathbf{J}$, donc,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_S = \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\Phi}{T} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_Q}{T} + \mathbf{J}_Q \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right)$$

- Pour un matériau thermoélectrique donné, le potentiel thermoélectrique permet donc d'obtenir directement les productions de chaleur et d'entropie via les dégradations respectives de Φ et $\frac{\Phi}{T}$.

Rendement de production électrique.

- Bilan de la puissance électrique : $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \mathbf{J}_Q = T \nabla \cdot \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_S \cdot \nabla T$.
- Rendement réduit ,

$$\eta_r = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}}{\mathbf{J}_S \cdot \nabla T} = \frac{1}{1 + T \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_S}{|\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}|}}$$

- Le rendement est directement réduit par la production d'entropie $\nabla \cdot \mathbf{J}_S$.
- Rendement de Carnot \Leftrightarrow production d'entropie nulle, $\nabla \cdot \mathbf{J}_S = 0$.
- Puissance électrique maximale produite $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{J}_S \cdot \nabla T$.

$$\eta_r = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}}{\mathbf{J}_S \cdot \nabla T} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_Q}{\frac{\mathbf{J}_Q}{T} \cdot \nabla T} = \frac{T \nabla \Phi \cdot \mathbf{J}}{\Phi \nabla T \cdot \mathbf{J}}$$

- Le rendement est relié au rapport entre les variations relatives $\frac{\nabla \Phi}{\Phi}$ et $\frac{\nabla T}{T}$.

$$\eta_r = \frac{1 - \frac{\alpha}{z(\Phi - T\alpha)}}{1 + \frac{z(\Phi - T\alpha)}{zT\alpha}}$$

- Le rendement réduit est maximal pour la valeur du courant relatif optimal $u_{\text{opt}} = s = \frac{\sqrt{1+zT}-1}{\alpha T}$. Alors,

$$\eta_{r,\text{opt}} = \frac{\sqrt{1+zT}-1}{\sqrt{1+zT}+1} = \left(2\frac{\Phi_{\text{opt}}}{\alpha T} - 1\right)^{-1}$$

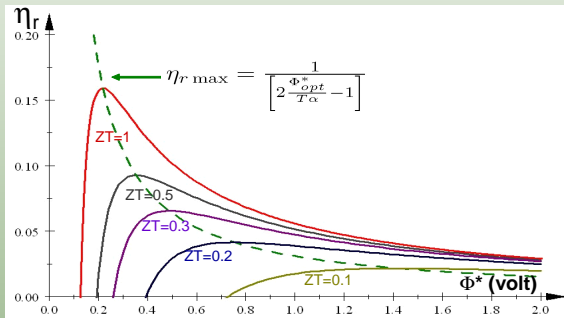
- Le potentiel thermoélectrique prend alors la valeur,

$$\Phi_{\text{opt}} = \left[T\alpha + \frac{1}{s}\right] = T\alpha \left[\frac{\sqrt{1+zT}}{\sqrt{1+zT}-1}\right]$$

- La valeur optimale Φ_{opt} définit les conditions de fonctionnement optimale et par suite le jeu des valeurs du couple (μ, T) qui y conduisent.
- En d'autres termes Φ_{opt} et $u_{\text{opt}} = s$ sont deux expressions distinctes des mêmes conditions de fonctionnement.

Rendement et conditions d'usage: (Goupil JAP 2009)

- Le tracé de la courbe $\eta_r = f\left(\frac{\Phi}{T}\right)$ pour différentes valeurs de $z T$ illustre ce résultat.

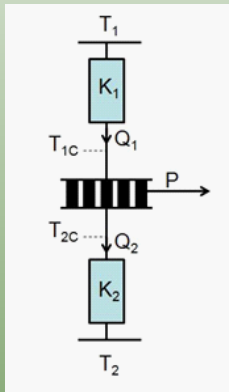


- Le contrôle des valeurs de Φ au voisinage de $\Phi = \Phi_{opt}$ est crucial.
- Régler $\Delta\Phi \Leftrightarrow$ régler ΔV et ΔT .
- Le fonctionnement optimal est toujours réalisé avec production d'entropie** dès lors qu'il y a production de puissance électrique.
- E. Müller, K. Zabrocki, C. Goupil, G.J. Snyder, and W. Seifert. In D.M. Rowe, editor, CRC Handbook of Thermoelectrics: Thermoelectrics and

Its Energy Harvesting, Vol. 1, Chapter 4. CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.

Modélisation des dispositifs thermoélectriques.

- Le formalisme de Onsager donne une description locale des mécanismes de couplage des flux et des potentiels.
- Du point de vue des applications il est plus aisé de considérer une modélisation macroscopique moyenne mettant directement en oeuvre les paramètres technologiques du système.



Paramètres moyens.

- La cellule thermoélectrique étant composée d'autant d'éléments de matériaux de type P que de type N, on peut considérer utilement définir un matériau moyen en posant.

$$\alpha = \frac{|\alpha_p| + |\alpha_n|}{2}$$
$$\frac{1}{\sigma_T} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{T_p}} + \frac{1}{\sigma_{T_n}} \right)$$
$$\kappa = \frac{\kappa_p + \kappa_n}{2}$$

où les indices p ou n définissent les propriétés des matériaux respectivement P ou N.

- On ne considère pas la dépendance en température des paramètres, mais on limite à une valeur moyenne. Le coefficient Seebeck est défini positif.
- Si les températures des sources varient spatialement, (ex: lignes d'échappement) le modèle du système générique peut très être répété en adaptant les paramètres. (zonage en sous-systèmes).

Démonstration.

Electrique : mise en série.

$$R_1 = \frac{1}{\sigma_1} \frac{L}{S}$$

$$R_2 = \frac{1}{\sigma_2} \frac{L}{S}$$

$$V = (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta T - (R_1 + R_2) I$$

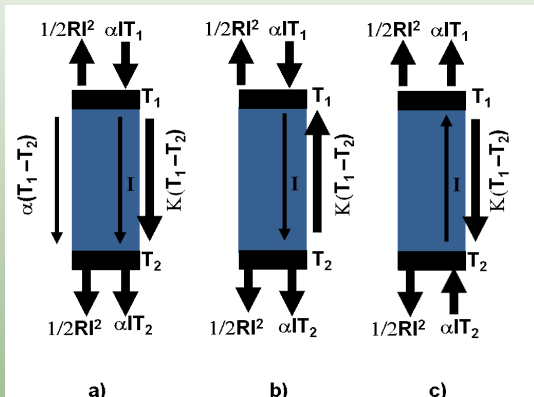
$$\alpha_{eq} = (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$R_{eq} = (R_1 + R_2)$$

On recherche une forme $V = \alpha \Delta T - RI$

$$\frac{1}{\sigma_{eq}} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}$$
$$\alpha_{eq} = \alpha_1 + \alpha_2$$

Bilan des puissances thermiques.



- a) Thermogenerator (TEG). ($T_1 - T_2 > 0$)
- b) Thermoelectric Cooler (TEC). ($T_1 - T_2 < 0$)
- c) Thermoelectric Heater (TEH). ($T_1 - T_2 > 0$)

Dispositif thermoélectrique idéalement couplé: Ioffe 1957

- On considère une cellule composée de N éléments de hauteur L et de section S , parcourue par un courant électrique I .
- Résistance électrique : $R_{in} = \frac{N}{\sigma_T} \frac{L}{S}$
- Conductance thermique : $K = N\kappa_J \frac{S}{L}$
- Températures : T_1 et T_2
- Différence de températures : $\Delta T = T_1 - T_2$
- Différence de tension : $\Delta V = \alpha N(T_1 - T_2)$
- Courants de chaleur : conductif $K\Delta T$, convectifs $\alpha NT_1 I$ et $\alpha NT_2 I$ dues à l'effet Peltier au niveau de chaque jonction isotherme.
- Dissipation Joule : $\frac{1}{2} R_{in} I^2$, vers les deux thermostats chaud et froid. La dissipation Joule étant répartie dans tout le volume de chacun des éléments thermoélectriques, elle diffuse au sein des matériaux et conduit à donner un profil des températures paraboliques qui diffère du profil linéaire obtenu dans le cas d'un écoulement de chaleur dans un matériau passif. La répartition de la contribution Joule en deux termes égaux à l'extrémité de chaque élément permet de rendre compte au premier ordre de ce profil de température en conservant les valeurs des dérivées spatiales des températures aux extrémités.

Modes de fonctionnement.

- Résistance de charge $R_{ch} = \frac{V}{I}$.
- R_{in} étant la résistance interne on pose $m = \frac{R_{ch}}{R_{in}}$.

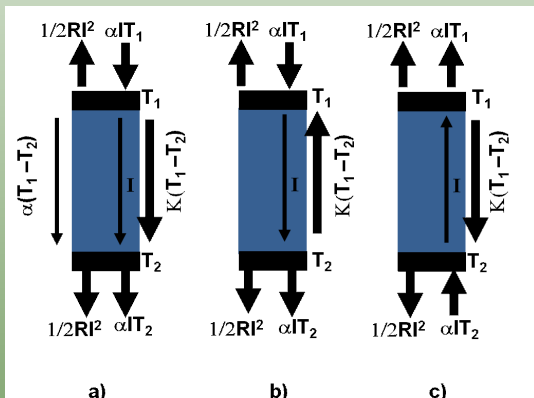
	<i>TEG</i>	<i>TEC</i>	<i>TEH</i>
R_{in}	> 0	> 0	> 0
R_{ch}	> 0	< 0	< 0
m	> 0	< 0	< 0
V	> 0	< 0	> 0
I	> 0	> 0	< 0
P	> 0	< 0	< 0
ΔT	> 0	< 0	< 0

La puissance électrique est comptée avec la convention générateur-récepteur usuelle en électricité, la puissance délivrée étant comptée positivement.

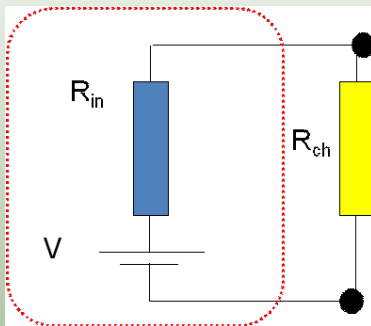
Bilan des puissances.

Le bilan des puissances entrantes (in) et sortante (out) s'établit comme suit,

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= \alpha N T_1 I - \frac{1}{2} R_{in} I^2 + K (T_1 - T_2) \\ \dot{Q}_2 &= \alpha N T_2 I + \frac{1}{2} R_{in} I^2 + K (T_1 - T_2)\end{aligned}$$



Mode thermogénérateur.



Les expressions générales de la tension et du courant sont,

$$V = V_0 \frac{R_{ch}}{R_{ch} + R_{in}} = V_0 \frac{m}{m + 1}$$
$$I = \frac{V_0}{R_{ch} + R_{in}} = \frac{V_0}{R_{in}} \frac{1}{m + 1}$$

Puissance électrique.

La tension à vide V_0 obtenue pour $m \rightarrow \infty$, et le courant de court-circuit I_{cc} obtenu pour $m = 0$, s'écrivent respectivement,

$$\begin{aligned}V_0 &= \alpha N (T_1 - T_2) \\ I_{cc} &= \frac{\alpha N}{R_{in}} (T_1 - T_2) = \frac{V_0}{R_{in}}\end{aligned}$$

La puissance électrique produite P s'écrit donc,

$$P = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = \frac{V_0^2}{R_{in}} \frac{m}{(m+1)^2}$$

La puissance maximale est obtenue pour $\frac{\partial P}{\partial m} = 0$. On trouve alors $m = 1$ d'où,

$$P_{\max} = \frac{\alpha^2 \Delta T^2}{4R_{in}}$$

En posant $\frac{1}{Z} = \frac{KR_{in}}{\alpha^2 N^2}$, l'expression du rendement du thermogénérateur s'écrit

$$\eta = \frac{P}{Q_1} = \frac{\Delta T}{T_1} \frac{m}{m + 1 + \frac{(m+1)^2}{ZT_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T_1}}$$

On remarque que le rendement est le produit de l'efficacité de Carnot $\eta_c = \frac{\Delta T}{T_1}$ par un terme d'irréversibilité, appelé aussi rendement réduit

$$\eta_r = \frac{m}{m + 1 + \frac{(m+1)^2}{ZT_1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta T}{T_1}}$$

Rendement maximal.

Compte-tenu des valeurs imposées des températures des thermostats la recherche du rendement maximal se réduit à la solution de l'expression $\frac{\partial \eta_r}{\partial m} = 0$. On trouve,

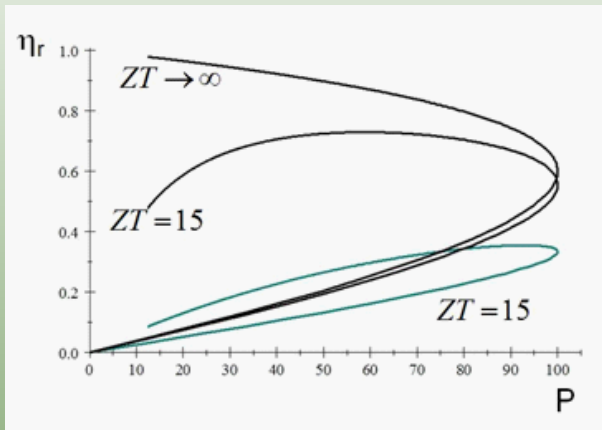
$$\eta_{\max} = \eta_c \times \frac{m_{opt} - 1}{m_{opt} + \frac{T_2}{T_1}}$$

$$m_{opt} = \sqrt{1 + Z \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right)} = \sqrt{1 + Z\bar{T}}$$

On remarque que l'efficacité maximale est obtenue pour une valeur $m_{opt} = \sqrt{1 + Z\bar{T}}$ qui diffère sensiblement de la valeur $m = 1$ obtenue dans le cas de la recherche de puissance maximale. Il en résulte que l'optimisation du fonctionnement du système en terme de puissance diffère de l'optimisation en terme de rendement.

Rendement ou puissance?

Traçé du rendement en fonction de la puissance sur un graphe paramétré en fonction de la valeur de m .



- Si ZT infini alors le comportement de la cellule thermoélectrique est réversible. Le rendement de Carnot est alors accessible, au prix d'une production de puissance nulle.

Mode pompe à chaleur pour rafraîchissement : TEC.

Le mode pompe à chaleur rafraîchissante est très semblable au mode TEG puisque le bilan des puissances entrantes (in) et sortante (out) est identique,

$$\dot{Q}_1 = \left[\frac{T_1}{(T_1 - T_2)}(m + 1) - \frac{1}{2} \right] \frac{V_0^2}{R_{in}} \frac{1}{(m + 1)^2} + K(T_1 - T_2)$$

$$\dot{Q}_2 = \left[\frac{T_2}{(T_1 - T_2)}(m + 1) + \frac{1}{2} \right] \frac{V_0^2}{R_{in}} \frac{1}{(m + 1)^2} + K(T_1 - T_2)$$

- Ne diffère du mode générateur thermoélectrique que par la valeur du courant électrique qui dépasse le courant de court-circuit et place ainsi la cellule en mode récepteur.
- En régime établi $\Delta T = T_1 - T_2 < 0$.
- Le coefficient m et la tension à vide V_0 sont négatif.
- La puissance \dot{Q}_1 est retirée de la zone 1 et la puissance \dot{Q}_2 rejetée dans la zone 2.

Puissance électrique fournie au TEC.

La puissance électrique reçue vaut donc,

$$P_{re\dot{c}ue} = \dot{Q}_2 - \dot{Q}_1 = -\frac{V_0^2}{R_{in}} \frac{m}{(m+1)^2}$$

- Puissance de refroidissement maximale obtenue pour $\frac{\partial \dot{Q}_1}{\partial m} = 0$, ce qui correspond à $m = \frac{T_1 - 2T_2}{T_2}$ donc un courant électrique de valeur

$$I = \frac{V_0}{R_{in}} \frac{1}{m+1} = \frac{V_0}{R_{in}} \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{\alpha N}{R_{in}} T_2$$

- Courant positif et supérieur au courant de court-circuit I_{cc} .
- Puissance thermique associée

$$\dot{Q}_{1_{\max}} = K \left(\left[\frac{T_2}{T_1} - \frac{1}{2} \right] ZT_2^2 + (T_1 - T_2) \right)$$

Coefficient de performance pour le TEC.

Le coefficient de performance, COP_{PR} est donné conventionnellement par,

$$COP_{PR} = \frac{\dot{Q}_1}{P_{re\dot{c}ue}} = \frac{\left(\frac{T_1}{(T_1 - T_2)} (m + 1) - \frac{1}{2} \right) \frac{V_0^2}{R_{in}} \frac{1}{(m+1)^2} + K (T_1 - T_2)}{-\frac{V_0^2}{R_{in}} \frac{m}{(m+1)^2}}$$

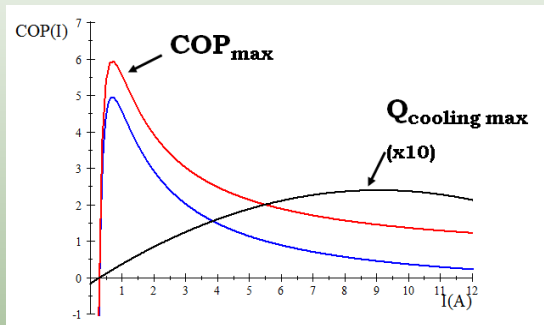
En posant $\frac{1}{Z} = \frac{KR_{in}}{\alpha^2 N^2}$, l'expression devient,

$$COP_{PR} = \frac{\dot{Q}_1}{P_{re\dot{c}ue}} = \frac{T_1}{(T_2 - T_1)} \frac{(m + 1) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{(m+1)^2}{ZT_1}}{m}$$

Similairement au TEG le résultat comporte le facteur de Carnot ,

$COP_{Carnot} = \frac{T_2}{(T_2 - T_1)}$, qui est le terme réversible suivi du seconde terme qui contien les irréversibilités.

Coefficient de performance maximal pour le TEC.



La valeur du maximum de ce coefficient de performance est donnée par

$\frac{\partial COP_{PR}}{\partial m} = 0$ ce qui correspond à $m = -\sqrt{1 + Z \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right)} = -\sqrt{1 + Z\bar{T}}$. D'où,

$$COP_{PR_{max}} = \frac{T_1}{(T_2 - T_1)} \frac{\sqrt{1 + Z\bar{T}} - \frac{T_2}{T_1}}{\sqrt{1 + Z\bar{T}} + 1}$$

Mode pompe à chaleur pour le chauffage : TEH.

- Idem TEC mais avec un courant électrique opposé.
- Expression de la puissance électrique identique au cas TEC.
- Puissance de chauffage maximale obtenue pour $\frac{\partial \dot{Q}_2}{\partial m} = 0$, ce qui correspond à $m = \frac{T_2 - 2T_1}{T_1}$ donc un courant de valeur

$$I = \frac{V_0}{R_{in}} \frac{1}{m + 1} = \frac{V_0}{R_{in}} \frac{T_1}{T_2 - T_1} = -\frac{\alpha N}{R_{in}} T_1$$

On remarquera que ce courant est bien négatif.

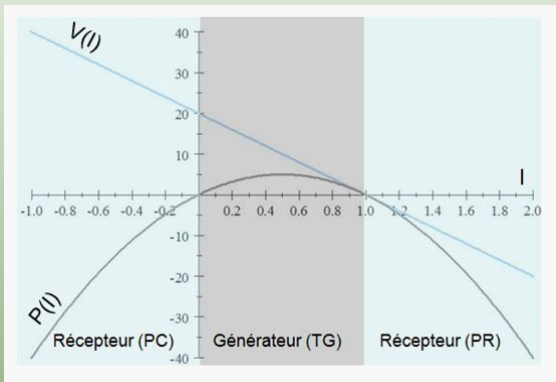
Coefficient de performances pour le TEH.

Le coefficient de performance COP_{PC} , donné conventionnellement par $COP_{PC} = -\frac{\dot{Q}_1}{P_{re\dot{c}ue}}$, atteint une valeur maximale pour $m = \sqrt{1 + Z\bar{T}}$,

$$COP_{PC_{max}} = \frac{T_1}{(T_1 - T_2)} \left(1 - 2 \frac{\sqrt{1 + Z\bar{T}} - 1}{ZT_1} \right)$$

Résumé des modes de fonctionnement.

Il est intéressant de résumer les modes de fonctionnement d'une machine thermoélectrique en représentant les cadrants de fonctionnement.

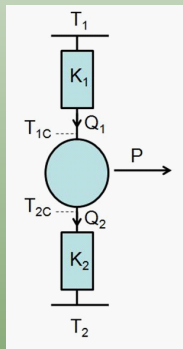


- Fonctionnement en mode récepteur, (TEC & TEH)
- Le quadrant central est celui du mode générateur TEG.
- Le mode TEG est donc toujours perturbé par un effet de pompage thermique.

- **Point crucial et conséquences importantes si le couplage aux thermostats n'est pas idéal.**
- En effet, dans le cas de couplage aux thermostats par des échangeurs, le fonctionnement en mode thermogénérateur se traduit par une chute des températures aux bornes de la cellule thermoélectrique du fait de ces effets de pompage. Il en résulte une chute notable de puissance électrique produite.
- La modélisation du comportement de la machine thermoélectrique en présence d'échangeur est donc tout à fait cruciale.
- L'optimisation d'un système complet nécessite de prendre en compte les conditions aux limites thermiques qui conditionnent l'ensemble du fonctionnement. Ces conditions sont mixtes et ne relèvent ni de pures conditions de potentiel (Neuman) ni de flux (Dirichlet).

Dispositif thermodynamique à couplage par échangeurs: présentation.

Le couplage d'une machine thermodynamique à ses thermostats via des échangeurs est une question classique de thermodynamique à temps fini. Dans le cas d'une machine endoréversible le traitement en a été effectué par Novikov en 1957, puis par Curzon et Ahlborn en 1975. Chambadal, en 1958 a aussi décrit cette question mais selon une approche sensiblement différente. La description la plus générale d'un tel système est la suivante:



Dispositif thermodynamique à couplage par échangeurs: Notations.

- T_1 : température de source chaude.
- T_2 : température de source froide.
- T_{1C} : température de paroi de machine coté chaud.
- T_{2C} : température de paroi de machine coté froid.
- $\dot{Q}_1 = K_1(T_1 - T_{1C})$: Puissance thermique entrant dans la machine. (ex: détente isotherme)
- $\dot{Q}_2 = K_2(T_{2C} - T_2)$: Puissance thermique sortant de la machine. (ex: compression isotherme)

Comment optimiser la puissance?

Pour l'optimisation du fonctionnement d'un tel système, le problème posé est le suivant:

"Soit une machine endoréversible couplée à ses thermostats par des conductances thermiques finies K_1 et K_2 , comment rendre maximale la puissance produite par cette machine?"

Deux stratégies se dessinent:

- 1 Rendre maximum le flux thermique traversant la machine, qui sera converti en puissance de travail par la machine, ce qui revient à minimiser la différence de température aux bornes de la machine.
- 2 Rendre maximum la différence de température aux bornes de la machine pour rendre maximal le rendement de Carnot associé $\eta_{C_w} = \frac{T_{1C} - T_{2C}}{T_{1C}}$

- le maximum de puissance extractible dans cette configuration dépend de la différence de température $\Delta T_C = (T_{1C} - T_{2C})$ et du courant de chaleur \dot{Q}_1 .
 - 1 \dot{Q}_1 maximum : A rejeter car conduit à $T_{1C} - T_{2C} = 0$, donc à $\eta_{C_w} = 0$.
 - 2 ΔT_C maximum: Conduit à retrouver la machine de Carnot réversible...donc une puissance nulle.

La puissance maximale est donc obtenue pour une configuration intermédiaire qu'il convient de déterminer.

Rendement de Novikov-Curzon-Ahlborn.

- $\Delta T_1 = T_1 - T_{1C}$ et $\Delta T_2 = T_{2C} - T_2$

$$\Delta T_2 = \sqrt{\frac{K_1 T_2}{K_2 T_1}} \Delta T_1$$

- Critère:

$$\frac{\partial P}{\partial \Delta T_1} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \Delta T_2} = 0$$

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}}$$

$$\frac{\Delta T_2}{T_2} = \frac{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}}$$

Rendement à puissance maximale.

Le rendement à puissance maximale est alors,

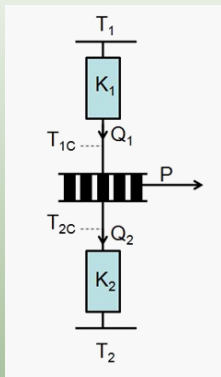
$$\eta_{P_{\max}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_{2C}}{T_{1C}} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

- Ne dépend pas des conductivités des échangeurs thermiques.
- En considérant $\frac{T_2}{T_1} = 1 - \eta_C$, par un développement limité on trouve,

$$\eta_{P_{\max}} = 1 - \sqrt{1 - \eta_C} = \frac{\eta_C}{2} + O(\eta^2)$$

- Il s'en suit que dans les cas réaliste, où les machines sont effectivement reliées aux thermostats via des échangeurs, $\eta_{P_{\max}} \simeq \frac{\eta_C}{2}$.
- Le rendement de Carnot n'est pas inaccessible, mais il ne coïncide pas avec la condition de puissance maximale.

Cas d'une machine thermoélectrique: présentation.



On repart des expressions connue,

$$\dot{Q}_1 = \alpha N T_{1c} I - \frac{1}{2} R_{in} I^2 + K_1 (T_{1c} - T_{2c})$$

$$\dot{Q}_2 = \alpha N T_{2c} I + \frac{1}{2} R_{in} I^2 + K_2 (T_{1c} - T_{2c})$$

Configuration endoréversible: puissance.

Dans la configuration idéale endoréversible, en annulant dans la machine toutes les sources d'irréversibilité, c'est à dire $R_{in} = 0$ et $K = 0$, on trouve,

$$\dot{Q}_1 = K_1 (T_1 - T_{1C}) = \alpha N T_{1C} I$$

$$\dot{Q}_2 = K_2 (T_{2C} - T_2) = \alpha N T_{2C} I$$

$$P = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = I \alpha N \Delta T_C$$

$$I = \frac{P}{\alpha N \Delta T_C}$$

donc, $T_{1C} = \frac{K_1 T_1}{\alpha N I + K_1}$ et $T_{2C} = \frac{K_2 T_2}{K_2 - \alpha N I}$.

On trouve,

$$P = \frac{K_1 K_2}{(K_1 + K_2)} T_1 \frac{\eta (\eta_c - \eta)}{(1 - \eta)}$$

Configuration endoréversible: rendement.

La puissance maximale est alors donnée par $\frac{d \frac{\eta(\eta_c - \eta)}{(1-\eta)}}{d\eta} = \frac{\eta^2 - 2\eta + \eta_c}{(\eta - 1)^2}$ soit,

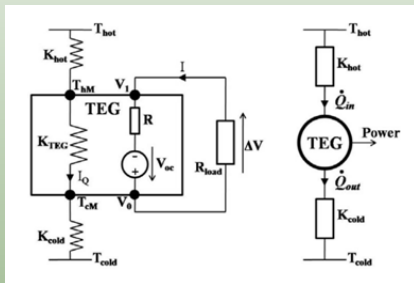
$$\eta^2 - 2\eta + \eta_c = 0$$

- La seconde racine correspond à l'expression de Novikov-Curzon-Ahlborn,

$$\eta_{P_{\max}} = 1 - \sqrt{1 - (1 - \frac{T_2}{T_1})} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Optimisation générale d'un thermogénérateur: Apertet et al EPL 2012.

- $K_{\text{contact}}^{-1} = K_{\text{cold}}^{-1} + K_{\text{hot}}^{-1}$ et $ZT = \alpha^2 T / R_{in} K_{I=0}$.



- A partir de l'expression $K_{V=0} = K_{I=0} (1 + Z\bar{T})$, On peut extrapoler,

$$K_C(I) = K_{I=0} \left(1 + \frac{I}{I_{CC}} Z\bar{T} \right),$$

avec $I_{CC} = \alpha \Delta T_C / R = f(\Delta T_C)$, donc pas de solution analytique exacte.

- On peut écrire

$$\dot{Q}_1 = \alpha T_{1C} I - \frac{1}{2} R I^2 + K_{I=0} (T_{1C} - T_{2C})$$

$$\dot{Q}_2 = \alpha T_{2C} I + \frac{1}{2} R I^2 + K_{I=0} (T_{1C} - T_{2C})$$

- Bilan complété par $\dot{Q}_1 = K_1 (T_1 - T_{1C})$ et $\dot{Q}_2 = K_2 (T_{2C} - T_2)$.
- Soit à résoudre le système d'équations.

Distribution des températures: résolution.

- Système 2×2 liant les températures T_{2C} , T_{1C} , T_2 et T_1 :

$$\begin{pmatrix} T_1 + \frac{1}{2} \frac{Rl^2}{K_1} \\ -T_2 - \frac{1}{2} \frac{Rl^2}{K_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1C} \\ T_{2C} \end{pmatrix},$$

Avec $\mathcal{M}_{11} = K_{I=0}/K_1 + \alpha l/K_1 + 1$, $\mathcal{M}_{12} = -K_{I=0}/K_1$, $\mathcal{M}_{21} = K_{I=0}/K_2$,
 $\mathcal{M}_{22} = \alpha l/K_2 - K_{I=0}/K_2 - 1$.

- Solution analytique accessible par simple inversion de la matrice (\mathcal{M}) mais résultat lourd est peu exploitable.
- Approximation très raisonnable obtenue en considérant le pont diviseur des températures constitué par les trois conductances K_1 , K_C et K_2 en série.

$$\Delta T_C = T_{1C} - T_{2C} \approx \frac{K_{\text{contact}}}{K_C(I=0) + K_{\text{contact}}} \Delta T$$

- Ce qui revient à considérer $P \ll \dot{Q}$.

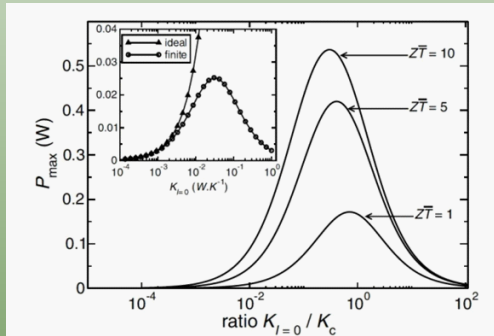
Optimisation par adaptation d'impédance thermique.

- Hypothèse: conductance thermique totale K_{contact} fixée.
- Optimisation de la puissance obtenue par ajustement de $K_{I=0}$ telle que:

$$\frac{K_{\text{contact}}}{K_{I=0}} = 1 + \frac{Z\bar{T}}{1+m},$$

Ce qui correspond à la simple égalité

$$K_{\text{contact}} = K_C(I)$$



Les deux optimisations électrique et thermiques ont défini les conditions d'adaptation qu'il convient de faire cohabiter. Ceci équivaut à souscrire à la fois aux deux équations $K_{\text{contact}} = K_C$ et $R_{\text{ch}} = R'_{\text{in}}$. On trouve alors,

$$\frac{K_{\text{contact}}}{K_{I=0}} = \sqrt{Z\bar{T} + 1}$$

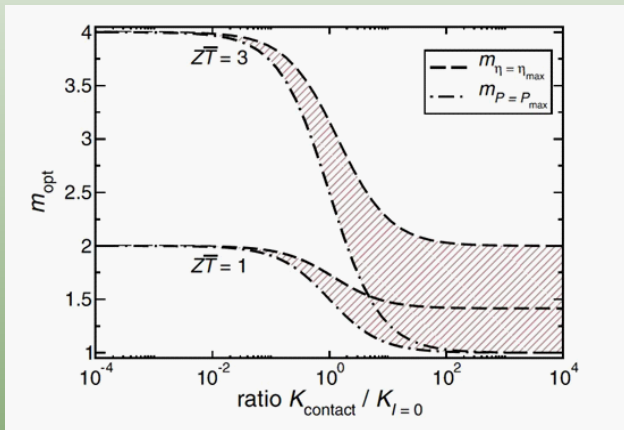
$$m_{P=P_{\text{ma}T_1}} = \sqrt{Z\bar{T} + 1}$$

Dans ce cas la puissance maximale obtenue s'écrit:

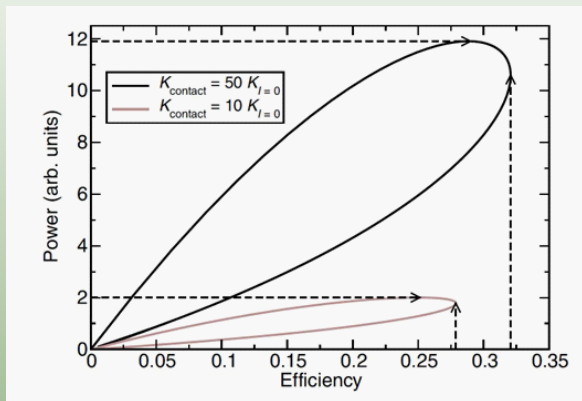
$$P_{\text{ma}T_1} = \frac{K_{\text{contact}} Z \bar{T}}{\left(1 + \sqrt{1 + Z \bar{T}}\right)^2} \frac{(\Delta T)^2}{4 \bar{T}},$$

Optimisation du rendement.

- Rendement du thermogénérateur, hors échangeurs, $\eta = \frac{K_{\text{contact}} + K_C}{K_{\text{contact}} K_C} \frac{P}{\Delta T}$,
- Egal à l'expression établie précédemment $\eta = \eta_C \times \frac{m}{1+m+(ZT_1)^{-1}(1+m)^2 - \eta_C/2}$



Rendement ou puissance?



- Contrairement au cas de couplage idéal, les rendements maximaux ne sont plus égaux.
- Les points de rendement maximal et puissance maximale sont voisins car ZT faible.

Remerciements.

Henni Ouerdane.
Yann Apertet.
Philippe Lecoœur.
Aurélie Michot.
Adel Abbout.
Jeffrey Snyder.
Wolfgang Seifert.
Knud Zabrocki.

Bibliographie générale.

- 1 Rowe, D.M., Ed. CRC Handbook of Thermoelectrics: Macro to Nano; RC: Boca Raton, FL, USA, (2006). Seebeck, T.J. Ueber den Magnetismus der galvanischen Kette. Technical report for the Royal Prussian Academy of Science: Berlin, Germany, (1821).
- 2 Peltier, J.C.A. Nouvelles expériences sur la calorité des courants électrique. Annales de Chimie et de Physique, 56, 371—386 , (1834).
- 3 Thomson, W. On the Mechanical Theory of Thermo-electric Currents. Trans. R. Soc. Edinburgh: Earth Sci. 3, 91—98, (1851).
- 4 Onsager, L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I. Phys. Rev. 37, 405—426, (1931). Onsager, L. Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II. Phys. Rev. 38, 2265—2279, (1931).
- 5 Callen, H.B. The Application of Onsager's Reciprocal Relations to Thermoelectric, Thermomagnetic, and Galvanomagnetic Effects. Phys. Rev. 1948, 73, 1349—1358. Callen, H.B. On the theory of irreversible processes. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology - (M.I.T.), Cambridge, MA, USA, (1947).
- 6 de Groot, S.R. Thermodynamics of Irreversible Processes; North-Holland Publishing Company: Amsteden, The Netherlands, 1963.

Bibliographie spécifique.

- 1 Vining, C.B. The thermoelectric process. In Materials Research Society Symposium Proceedings: Thermoelectric Materials - New Directions and Approaches; Tritt, T., Kanatzidis, M., Lyon, H.B., Jr., Mahan, G., Eds.; Materials Research Society: Warrendale, PA, USA; pp. 3—13 (1997).
- 2 Callen, H. B, Thermodynamics and an introduction to Thermostatistics, John Wiley & Sons, (1985)
- 3 Snyder, G.J.; Ursell, T.S. Thermoelectric Efficiency and Compatibility. Phys. Rev. Lett. 91, 148301, (2003).
- 4 Goupil, C. Thermodynamics of the thermoelectric potential. J. Appl. Phys. 106, 104907, (2009).
- 5 Ioffe, A. Semiconductor Thermoelements and Thermoelectric Cooling; Infosearch, ltd.: London, UK, (1957).
- 6 Curzon, F.; Ahlborn, B. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. Am. J. Phys. , 43, 22—24, (1975).
- 7 Andresen, et al. Thermodynamics in finite time: Extremals for imperfect heat engines. J. Chem. Phys. 66, 1571—1577, (1977).
- 8 Y. Apertet et al. Physical Review E 85, 041144 (2012).
- 9 Y. Apertet et al. Europhysics Letters 97, 28001 (2012)